Diploma Programme
Programme du diplôme
Programa del Diploma

Diploma Programme
Programme du diplôme
Programa del Diploma

Mathématiques : analyse et approches
Niveau supérieur
Épreuve 1

Vendredi 6 mai 2022 (après-midi)

Numéro de session du candidat

2 heures

Instructions destinées aux candidats

- Écrivez votre numéro de session dans les cases ci-dessus.
- N'ouvrez pas cette épreuve avant d'y être autorisé(e).
- Aucune calculatrice n'est autorisée pour cette épreuve.
- Section A : répondez à toutes les questions. Rédigez vos réponses dans les cases prévues à cet effet.
- Section B : répondez à toutes les questions sur le livret de réponses prévu à cet effet. Écrivez votre numéro de session sur la première page du livret de réponses, et attachez ce livret à cette épreuve d'examen et à votre page de couverture en utilisant l'attache fournie.
- Sauf indication contraire dans l'intitulé de la question, toutes les réponses numériques devront être exactes ou correctes à trois chiffres significatifs près.
- Un exemplaire non annoté du **livret de formules pour les cours de mathématiques : analyse et approches** est nécessaire pour cette épreuve.
- Le nombre maximum de points pour cette épreuve d'examen est de **[110 points]**.

2222 – 7116

Le total des points ne sera pas nécessairement attribué pour une réponse correcte si le raisonnement n'a pas été indiqué. Les réponses doivent être appuyées par un raisonnement et/ou des explications. Lorsque la réponse est fausse, certains points peuvent être attribués si la méthode utilisée est correcte, pour autant que le raisonnement soit indiqué par écrit. On vous recommande donc de montrer tout votre raisonnement.

Section A

Répondez à **toutes** les questions. Rédigez vos réponses dans les cases prévues à cet effet. Si cela est nécessaire, vous pouvez poursuivre votre raisonnement en dessous des lignes.

1. [Note maximale : 5]

Le $n^{\text{ième}}$ terme d'une suite arithmétique est donné par $u_n = 15 - 3n$.

(a) Indiquez la valeur du premier terme, u_1. [1]

(b) Étant donné que le $n^{\text{ième}}$ terme de cette suite est -33, trouvez la valeur de n. [2]

(c) Trouvez la raison, d. [2]

. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .

2. [Note maximale : 6]

Considérez n'importe quels trois entiers consécutifs, $n-1$, n et $n+1$.

(a) Prouvez que la somme de ces trois entiers est toujours divisible par 3. [2]

(b) Prouvez que la somme des carrés de ces trois entiers n'est jamais divisible par 3. [4]

3. [Note maximale : 8]

Une fonction f est définie par $f\left(x\right)=\dfrac{2x-1}{x+1}$, où $x\in\mathbb{R}$, $x\neq-1$.

(a) La représentation graphique de $y=f(x)$ possède une asymptote verticale et une asymptote horizontale.

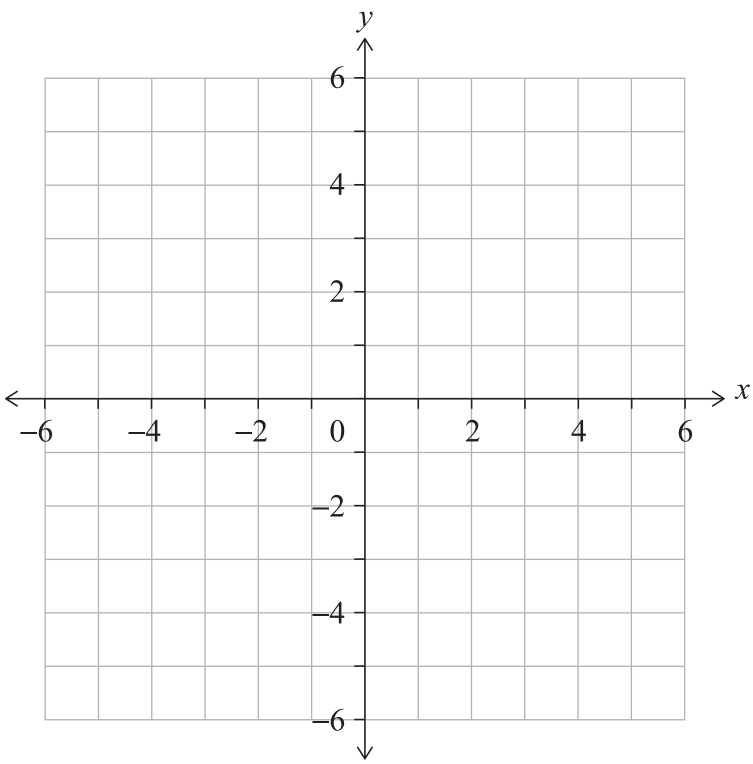
Écrivez l'équation de

(i) l'asymptote verticale ;

(ii) l'asymptote horizontale. [2]

(b) Sur le système d'axes ci-dessous, esquissez la représentation graphique de $y=f(x)$.

Sur votre esquisse, indiquez clairement les asymptotes et la position de tout point d'intersection avec les axes. [3]



(c) À partir de là, résolvez l'inéquation $0<\dfrac{2x-1}{x+1}<2$. [1]

(d) Résolvez l'inéquation $0<\dfrac{2\left|x\right|-1}{\left|x\right|+1}<2$. [2]

(Suite de la question à la page suivante)

(Suite de la question 3)

4. [Note maximale : 5]

Trouvez la plus petite valeur positive de x pour laquelle $\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}$.

5. [Note maximale : 7]

Considérez le développement $(x+1)^7 = x^7 + ax^6 + bx^5 + 35x^4 + ... + 1$, où $x \neq 0$ et a, $b \in \mathbb{Z}^+$.

(a) Montrez que $b = 21$. [2]

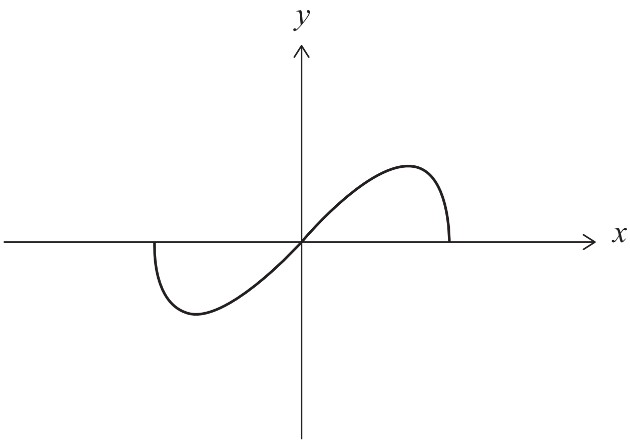
Le troisième terme du développement est la moyenne du deuxième terme et du quatrième terme du développement.

(b) Trouvez les valeurs possibles de x. [5]

6. [Note maximale : 8]

Une fonction f est définie par $f\left(x\right)=x\sqrt{1-x^2}$, où $-1 \le x \le 1$.

La représentation graphique de $y=f(x)$ est illustrée ci-dessous.



(a) Montrez que f est une fonction impaire. [2]

L'image de f est $a \le y \le b$, où a, $b \in \mathbb{R}$.

(b) Trouvez la valeur de a et la valeur de b. [6]

7. [Note maximale : 6]

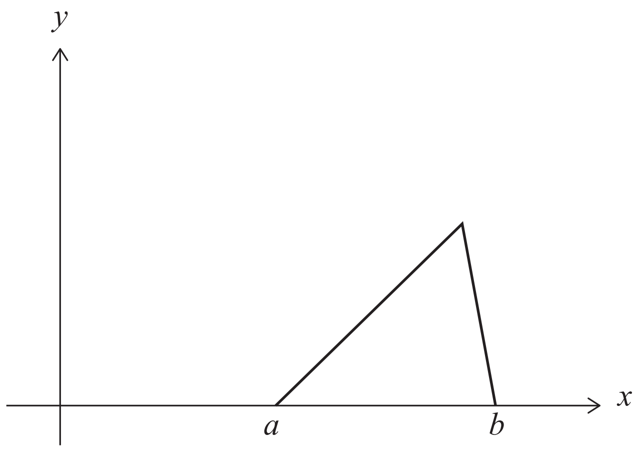
En utilisant le changement de variable $u = \sec x$ ou par toute autre méthode, trouvez une expression pour $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sec^n x \tan x \, dx$ en fonction de n, où n est un nombre réel non nul.

8. [Note maximale : 6]

La fonction de densité d'une variable aléatoire continue X est donnée par

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{(b-a)(c-a)}(x-a), & a\le x\le c\\ \dfrac{2}{(b-a)(b-c)}(b-x), & c< x\le b\\ 0, & \text{autrement}\end{cases}.$$

Le diagramme suivant montre la représentation graphique de $y=f(x)$ pour $a\le x\le b$.



Étant donné que $c\ge\dfrac{a+b}{2}$, trouvez une expression pour la médiane de X en fonction de a, b et c.

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

9. [Note maximale : 5]

Prouvez par l'absurde que l'équation $2x^3 + 6x + 1 = 0$ n'a aucune racine entière.

N'écrivez **pas** vos solutions sur cette page.

Section B

Répondez à **toutes** les questions sur le livret de réponses fourni. Veuillez répondre à chaque question sur une nouvelle page.

10. [Note maximale : 16]

Un dé biaisé à quatre faces, dont les faces sont identifiées par 1, 2, 3 et 4, est lancé et le résultat obtenu est enregistré. Soit X le résultat obtenu lorsque le dé est lancé. La distribution de probabilité pour X est donnée dans le tableau suivant, où p et q sont des constantes.

x	1	2	3	4
$\mathrm{P}(X=x)$	p	$0{,}3$	q	$0{,}1$

Pour cette distribution de probabilité, on sait que $\mathrm{E}(X)=2$.

(a) Montrez que $p=0{,}4$ et $q=0{,}2$. [5]

(b) Trouvez $\mathrm{P}(X>2)$. [2]

Nicky joue à un jeu avec ce dé à quatre faces. Dans ce jeu, elle a droit à un maximum de cinq lancers. Son score est calculé en additionnant les résultats de chaque lancer. Nicky gagne si son score est d'au moins dix.

Après avoir lancé le dé trois fois, Nicky a un score de quatre.

(c) En supposant que les lancers du dé sont indépendants, trouvez la probabilité que Nicky gagne. [5]

David a deux paires de dés non biaisés à quatre faces : une paire jaune et une paire rouge. Les faces des deux dés jaunes sont identifiées par 1, 2, 3 et 4. Soit S la somme obtenue lorsque les deux dés jaunes sont lancés. La distribution de probabilité pour S est montrée ci-dessous.

s	2	3	4	5	6	7	8
$\mathrm{P}(S=s)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$

Les faces du premier dé rouge sont identifiées par 1, 2, 2 et 3. Les faces du deuxième dé rouge sont identifiées par 1, a, a et b, où $a<b$ et $a, b \in \mathbb{Z}^+$. La distribution de probabilité pour la somme obtenue lorsque la paire rouge est lancée est la même que la distribution de probabilité pour la somme obtenue lorsque la paire jaune est lancée.

(d) Déterminez la valeur de b. [2]

(e) Trouvez la valeur de a, en fournissant une preuve pour votre réponse. [2]

N’écrivez **pas** vos solutions sur cette page.

11. [Note maximale : 20]

Une fonction f est définie par $f(x)=\dfrac{1}{x^2-2x-3}$, où $x \in \mathbb{R}$, $x \neq -1$, $x \neq 3$.

(a) Esquissez la courbe $y=f(x)$, en indiquant clairement toute asymptote avec son équation. Indiquez les coordonnées de tout maximum ou minimum relatif ainsi que celles de tout point d’intersection avec les axes. [6]

Une fonction g est définie par $g(x)=\dfrac{1}{x^2-2x-3}$, où $x \in \mathbb{R}$, $x > 3$.

(b) La réciproque de g est g^{-1}.

(i) Montrez que $g^{-1}(x)=1+\dfrac{\sqrt{4x^2+x}}{x}$.

(ii) Indiquez le domaine de g^{-1}. [7]

Une fonction h est définie par $h(x)=\arctan\dfrac{x}{2}$, où $x \in \mathbb{R}$.

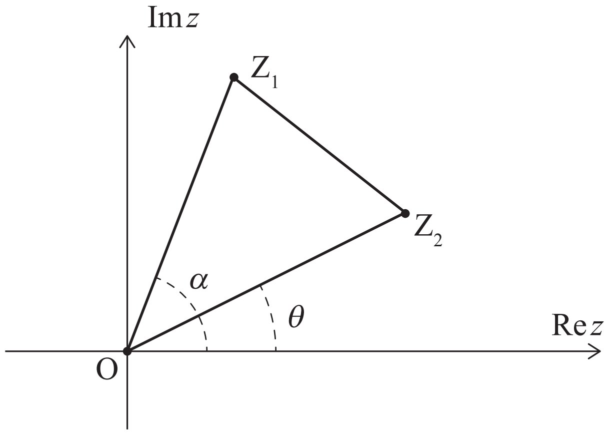
(c) Étant donné que $(h \circ g)(a)=\dfrac{\pi}{4}$, trouvez la valeur de a.

Donnez votre réponse sous la forme $p+\dfrac{q}{2}\sqrt{r}$, où p, q, $r \in \mathbb{Z}^+$. [7]

N’écrivez **pas** vos solutions sur cette page.

12. [Note maximale : 18]

Dans le diagramme d’Argand suivant, les points Z_1, O et Z_2 sont les sommets du triangle $\mathrm{Z}_1\mathrm{O}\mathrm{Z}_2$, décrits dans le sens antihoraire.



Le point Z_1 représente le nombre complexe $z_1 = r_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$, où $r_1 > 0$. Le point Z_2 représente le nombre complexe $z_2 = r_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, où $r_2 > 0$.

Les angles α et θ sont mesurés dans le sens antihoraire à partir de la partie positive de l’axe des réels, tel que $0 \le \alpha,\ \theta < 2\pi$ et $0 < \alpha - \theta < \pi$.

(a) Montrez que $z_1 z_2{}^* = r_1 r_2 \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\alpha - \theta)}$, où $z_2{}^*$ est le conjugué de z_2. [2]

(b) Étant donné que $\mathrm{Re}(z_1 z_2{}^*) = 0$, montrez que $\mathrm{Z}_1\mathrm{O}\mathrm{Z}_2$ est un triangle rectangle. [2]

Dans les parties (c), (d) et (e), considérez le cas où $\mathrm{Z}_1\mathrm{O}\mathrm{Z}_2$ est un triangle équilatéral.

(c) (i) Exprimez z_1 en fonction de z_2.

(ii) À partir de là, montrez que $z_1{}^2 + z_2{}^2 = z_1 z_2$. [6]

Soit z_1 et z_2 les racines distinctes de l’équation $z^2 + az + b = 0$, où $z \in \mathbb{C}$ et $a,\ b \in \mathbb{R}$.

(d) Utilisez le résultat de la partie (c)(ii) pour montrer que $a^2 - 3b = 0$. [5]

Considérez l’équation $z^2 + az + 12 = 0$, où $z \in \mathbb{C}$ et $a \in \mathbb{R}$.

(e) Étant donné que $0 < \alpha - \theta < \pi$, déduisez qu’un seul triangle équilatéral $\mathrm{Z}_1\mathrm{O}\mathrm{Z}_2$ peut être formé à partir du point O et des racines de cette équation. [3]

Références :

Veuillez ne **pas** écrire sur cette page.

Les réponses rédigées sur cette page
ne seront pas corrigées.

Veuillez ne **pas** écrire sur cette page.

Les réponses rédigées sur cette page ne seront pas corrigées.